

עבודת קיץ למסיימי כיתה י' 4 יח"ל.

תלמידים יקרים, מטרתה של העבודה להכין אתכם באופן מיטבי לשנה"ל הבאה.

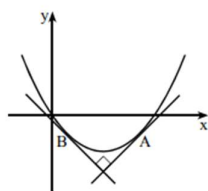
מועד הגשת העבודה: בשבוע הראשון ללימודים, תשפ"ו.

העבודה תוגש במחברת מסודרת או בקלסר, עבודות מרושלות לא יתקבלו.

בשבוע הראשון של הלימודים תתקיים בחינה על הנושאים הכלולים בעבודה. תלמיד שמגיש עבודה מלאה ומסודרת יקבל בonus 5 נקודות לציון הבחינה.

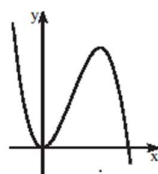
חופשה נעימה.

חשבון דיפרנציאלי – פולינומים



1. נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 - 5x$.
 ישר משיק לגרף הפונקציה בנקודה A שבה $x = 3$.
 א. מצאו את שיפוע הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה A.
 ב. המשיק לגרף הפונקציה בנקודה B מאונך למשיק בנקודה A (ראו ציור). מצאו את שיעורי הנקודה B.

2. המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{x^4}{2} - ax + 10$ בנקודה $x = 1$ מקביל לישר $y = -2x + 10$. מצאו את a.



3. לפניכם גרף הפונקציה $f(x) = -x^3 + 9x^2$.
 א. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגן.
 ב. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 ג. מצאו את שיעורי נקודות האפס של הפונקציה.
 ד. כמה פתרונות יש למשוואה $f(x) = -2$?
 הדרכה: היעזרו בגרף הפונקציה.
 ה. מצאו לאילו ערכי x הפונקציה $f(x)$ יורדת וחיובית.

4. נתונה הפונקציה $f(x) = -x^3 + 8x^2 - 16x$.
 א. מצאו: (1) תחום הגדרה. (2) נקודות קיצון. (3) תחומי עלייה וירידה. (4) נקודות חיתוך עם הצירים.
 ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.
 ג. נתונה הפונקציה $g(x) = f(x+3)$.

- (1) בכמה יחידות ולאיזה כיוון יש להזיז את גרף הפונקציה $f(x)$, כדי לקבל את הגרף של $g(x)$?
 (2) מהן שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$?
 (3) שרטטו (ללא חישובים נוספים) סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
 ד. (1) לאילו ערכים של k, יש למשוואה $f(x) = k$ שני פתרונות?
 (2) לאילו ערכים של k, יש למשוואה $g(x) = k$ שני פתרונות?

5. נתונה הפונקציה $f(x) = x^4 - 18x^2 + 32$.
 א. הוכיחו שהפונקציה היא פונקציה זוגית.
 ב. מצאו: (1) נקודות קיצון. (2) תחומי עלייה וירידה. (3) נקודות חיתוך על הצירים.
 ג. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
 ד. מהם תחומי החיוביות של הפונקציה $f(x)$?
 ה. היעזרו בסעיפים קודמים, ופתרו את אי השוויון $x^4 - 18x^2 + 32 < 0$.

6. הפונקציה $f(x) = 2x^3 - mx^2 + 12x$ מקיימת: $f'(3) = 12$.
 א. מצאו את m.
 ב. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
 ג. מצאו את שיעורי נקודות המינימום והמקסימום של הפונקציה.
 ד. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

7. נתונה הפונקציה $f(x) = x^4 - \frac{2x^3}{3}$.

- א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 ב. מצאו את שיעורי נקודות המינימום והמקסימום של הפונקציה.
 ג. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 ד. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
 ה. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.
 ו. לאילו ערכי x מתקיים $f(x) < 0$ וגם $f'(x) > 0$?
 ז. הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x) = -f(x)$. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$.
 ח. הפונקציה $h(x)$ מקיימת $h(x) = f(-x)$. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $h(x)$.
 ט. הגרף של $f(-x)$ סימטרי לגרף של $f(x)$ לעומת ציר ה- y .
 י. הגרף של $f(x)$ סימטרי לגרף של $f(x)$ לעומת ציר ה- x .

תשובות:

1. א. 1. ב. $(2; -6)$. 2. $a = 4$.
 3. א. $(0; 0)$ מינימום, $(6; 108)$ מקסימום. ב. עלייה: $0 < x < 6$, ירידה: $x > 6$ או $x < 0$.
 ג. $(0; 0)$, $(9; 0)$. ד. פתרון אחד. ה. $6 < x < 9$ או $x < 0$.
 4. א. (1) כל x . (2) $(1\frac{1}{3}; -9\frac{13}{27})$ מינימום, $(4; 0)$ מקסימום.
 ב. עלייה: $1\frac{1}{3} < x < 4$, ירידה: $x > 4$ או $x < 1\frac{1}{3}$. (3) $(0; 0)$, $(4; 0)$.
 ג. (1) 3 יחידות שמאלה.
 ב. $(1; 0)$ מקסימום, $(-1\frac{2}{3}; -9\frac{13}{27})$ מינימום.
 ד. (1) $k = -9\frac{13}{27}$, $k = 0$. (2) $k = -9\frac{13}{27}$, $k = 0$.
 5. א. (1) $(3; -49)$ מינימום, $(0; 32)$ מקסימום, $(-3; -49)$ מינימום.
 ב. עלייה: $x > 3$ או $-3 < x < 0$. ירידה: $0 < x < 3$ או $x < -3$.
 ג. $(-\sqrt{2}; 0)$, $(\sqrt{2}; 0)$, $(-4; 0)$, $(4; 0)$, $(0; 32)$.
 ד. $x < -4$ או $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ או $x > 4$.
 ה. $-4 < x < -\sqrt{2}$ או $\sqrt{2} < x < 4$.
 6. א. $m = 9$. ב. $(0; 0)$.
 ג. מקסימום $(1; 5)$, מינימום $(2; 4)$.
 7. א. כל x .
 ב. $(0.5; -0.021)$ מינימום.
 ג. עלייה: $x > 0.5$, ירידה: $x < 0.5$.
 ד. $(\frac{2}{3}; 0)$, $(0; 0)$. ו. $0.5 < x < \frac{2}{3}$.
 ז. $(0.5; 0.021)$ מקסימום. ח. $(-0.5; -0.021)$ מינימום.
 ה.

פונקציה מורכבת.

הנגזרת של פונקציה מורכבת שווה לנגזרת

של הפונקציה החיצונית כפול הנגזרת של הפונקציה הפנימית.
משפט זה נקרא "כלל השרשרת".

כלומר פונקציות מהצורה $y = [f(x)]^n$, כאשר $f(x)$ הוא פולינום ו- n הוא מספר טבעי.
בהסתמך על כלל השרשרת, נרשום את הנוסחה למציאת הנגזרת של פונקציה מורכבת:

$$y = [f(x)]^n \quad \text{הנוסחה:}$$

$$y' = n \cdot [f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$$

↓
הנגזרת של הפונקציה
הפנימית $f(x)$

דוגמאות:

דוגמאות:

ב. $y = (3x^2 - \frac{1}{2}x + 1)^4$

$$y' = 4(3x^2 - \frac{1}{2}x + 1)^3 (6x - \frac{1}{2})$$

↓
הנגזרת של הביטוי $(3x^2 - \frac{1}{2}x + 1)$

א. $y = (3x + 4)^6$

$$y' = 6(3x + 4)^5 \cdot 3 = 18(3x + 4)^5$$

↓
הנגזרת של הביטוי $(3x + 4)$

תרגילים

גזרו את הפונקציות המורכבות הבאות:

3. $y = (6 - x)^8$

6. $y = (\frac{1}{3}x + 4)^4$

9. $y = (x^2 - 9x + 8)^7$

12. $y = 5(x - 2)^7$

15. $y = -\frac{(x^3 - x^2)^3}{6}$

2. $y = (5 - 3x)^4$

5. $y = (-x + 3)^8$

8. $y = (x^2 - 7x)^6$

11. $y = -(x^3 - 4x)^3$

14. $y = \frac{1}{4}(6 - \frac{1}{2}x)^5$

1. $y = (7x + 4)^6$

4. $y = (x - 5)^4$

7. $y = (x^2 - 7)^3$

10. $y = (4x^5 - 8)^3$

13. $y = 4(7 - 2x)^6$

16. נתונה הפונקציה $y = (x - 1)^3$.

א. גזרו את הפונקציה.

ב. חשבו את ערך הנגזרת של הפונקציה בנקודה $x = 3$.

ג. קבעו האם הפונקציה עולה או יורדת בנקודה $x = 3$.

תשובות:

1. $42(7x + 4)^5$ 2. $-12(5 - 3x)^3$ 3. $-8(6 - x)^7$ 4. $4(x - 5)^3$ 5. $-8(-x + 3)^7$ 6. $(\frac{1}{3}x + 4)^3$
7. $6x(x^2 - 7)^2$ 8. $6(x^2 - 7x)^5(2x - 7)$ 9. $7(x^2 - 9x + 8)^6(2x - 9)$ 10. $60x^4(4x^5 - 8)^2$ 11. $-3(x^3 - 4x)^2(3x^2 - 4)$ 12. $35(x - 2)^6$ 13. $-48(7 - 2x)^5$ 14. $-\frac{5}{8}(6 - \frac{1}{2}x)^4$
15. $-\frac{(x^3 - x^2)^2(3x^2 - 2x)}{2}$ 16. א. $3(x - 1)^2$ ב. 12 ג. עולה 17. א. -30 ב. יורדת.

דוגמה:

- לגרף הפונקציה $y = (2x - 5)^4$ מעבירים משיק ששיפועו -8.
 א. מצאו את שיעורי נקודת ההשקה.
 ב. מצאו את משוואת המשיק.

פתרון:

- א. נגזרת הפונקציה היא $y' = 4(2x - 5)^3 \cdot 2 = 8(2x - 5)^3$.
 נשווה את הנגזרת ל-8: $8(2x - 5)^3 = -8$.
 נחלק ב-8 את שני האגפים: $(2x - 5)^3 = -1$.
 נוציא שורש שלישי משני האגפים: $(2x - 5) = \sqrt[3]{-1}$.
 נקבל $2x - 5 = -1$ ומכאן $x = 2$. נציב $x = 2$ בפונקציה $y = (2x - 5)^4$.
 נקבל: $y = (2 \cdot 2 - 5)^4 = (-1)^4 = 1$. שיעורי נקודת ההשקה הם $(2; 1)$.
 ב. נמצא את משוואת המשיק על פי השיפוע -8 והנקודה $(2; 1)$.
 נקבל: $y - 1 = -8(x - 2)$, כלומר $y - 1 = -8x + 16$, ומכאן $y = -8x + 17$.

18. נתונה הפונקציה $y = (x + 2)^4$.

- א. מצאו את הנגזרת של הפונקציה.
 ב. לגרף הפונקציה מעבירים משיק בנקודה $(-1; 1)$ שעל הגרף.
 (1) חשבו את שיפוע המשיק. (2) מצאו את משוואת המשיק.
 ג. חשבו את הזווית החדה שיוצר המשיק עם ציר ה- x .

19. לגרף הפונקציה $y = (x^2 - 8)^5$ מעבירים משיק בנקודה $x = 3$.
 א. מצאו את שיפוע המשיק. ב. מצאו את משוואת המשיק.

פתרו את המשוואות הבאות:

א. $(x + 4)^3 = 8$. ב. $(3x - 5)^5 = -32$. ג. $(x - 3)^4 = 16$.
 ד. $(2x + 3)^4 = 81$. ה. $(2x - 7)^3 = (x + 2)^3$. ו. $(4x - 1)^4 = (x + 2)^4$.

תשובות:

18. א. $y' = 4(x + 2)^3$. ב. (1) 4. (2) $y = 4x + 5$. ג. 75.96° . 19. א. 30. ב. $y = 30x - 89$.
 20. א. 2. ב. -1. ג. 5, -1. ד. 0, -3. ה. 9. ו. 1, $-\frac{1}{5}$.

חקירה של פונקציה מורכבת.

1.

נתונה פונקציה $f(x) = (x^2 - 1)^2$.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. הוכיחו שהפונקציה היא פונקציה זוגית.

ג. מצאו את שיעורי נקודות המינימום והמקסימום של הפונקציה.

ד. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ה. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ו. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

ז. מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה (אם ישנם).

ח. הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x) = f(x) - 6$.

(1) מצאו את נקודות המינימום והמקסימום של הפונקציה $g(x)$.

(2) כמה נקודות אפס יש לפונקציה $g(x)$?

תשובה:

א. כל x .

ב. הדרכה: הראו שעבור כל x שבתחום ההגדרה מתקיים $f(-x) = f(x)$.

ג. (0;1) מקסימום, (1;0) מינימום, (-1;0) מינימום.

ד. עלייה: $x > 1$ או $-1 < x < 0$

ירידה: $0 < x < 1$ או $x < -1$

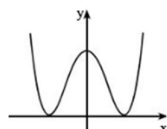
ה. (-1;0), (1;0), (0;1).

ז. חיוביות: $x > 1$ או $-1 < x < 1$

או $x < -1$. שליליות: אין.

ח. (1) (0;-5) מקסימום, (1;-6) מינימום, (-1;-6) מינימום.

(2) שתי נקודות.



2.

נתונה פונקציה $f(x) = (x + 3)^4 - 1$.

א. מצאו את שיעורי נקודות המינימום והמקסימום של הפונקציה.

ב. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ג. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ד. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

ה. מצאו את התחום שבו $f(x) < 0$ וגם $f'(x) > 0$.

ו. מצאו את ערכי k שעבורם חותך הישר $y = k$ את גרף הפונקציה:

(1) ב-2 נקודות. (2) בנקודה אחת. (3) באף נקודה.

ז. באילו נקודות חותך גרף הפונקציה את הישר $y = 15$?

תשובה:

א. מינימום. (-3;-1).

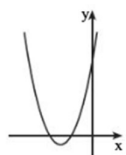
ב. עלייה: $x > -3$, ירידה: $x < -3$.

ג. (0;80), (-2;0), (-4;0). ה. $-3 < x < -2$.

ו. (1) $k > -1$, (2) $k = -1$, (3) $k < -1$.

ז. (-5;15), (-1;15).

ח. (-3;1) מקסימום, (-2;0) מינימום, (-4;0) מינימום.



הנגזרת של מכפלת שתי פונקציות

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x) \quad \text{הנוסחה:}$$

במילים: הנגזרת של מכפלת שתי פונקציות שווה לנגזרת של הפונקציה הראשונה כפול הפונקציה השנייה (איך שהיא), ועוד (פלוס) הנגזרת של הפונקציה השנייה כפול הפונקציה הראשונה (איך שהיא).

נגזור בעזרת נוסחה זו את פונקציית המכפלה הנ"ל $y = (x^2 + 1)(3x - 5)$.

נציב בנוסחה לנגזרת של מכפלת שתי פונקציות.

$$y' = 2x(3x - 5) + 3(x^2 + 1)$$

אם נפתח סוגריים ונכנס איברים דומים, נקבל $y' = 9x^2 - 10x + 3$.

גזרו את הפונקציות הבאות

$$y = 4x^5 \cdot 3x^2 \quad .2$$

$$y = 2x^2 \cdot x \quad .1$$

$$y = x^2(2x + 1) \quad .4$$

$$y = x(x + 7) \quad .3$$

$$y = (4x + 1)(1 - 5x) \quad .6$$

$$y = (2x + 3)(4x - 5) \quad .5$$

$$y = (x^2 + 1)(x - 7) \quad .8$$

$$y = x^3(7x^2 - 6) \quad .7$$

$$y = (2x^2 - x + 1)(5x + 4) \quad .10$$

$$y = (5x^2 - 3)(3x + 2) \quad .9$$

$$y = (2x^3 - 2x)(x^2 + 5x + 7) \quad .12$$

$$y = (x^2 + 2x + 3)(x - 7) \quad .11$$

תשובות:

$$.1 \quad 6x^2 \quad .2 \quad 84x^6 \quad .3 \quad 2x + 7 \quad .4 \quad 6x^2 + 2x \quad .5 \quad 16x + 2 \quad .6 \quad -40x - 1 \quad .7 \quad 35x^4 - 18x^2 \quad .8 \quad 3x^2 - 14x + 1$$

$$.9 \quad 45x^2 + 20x - 9 \quad .10 \quad 30x^2 + 6x + 1 \quad .11 \quad 3x^2 - 10x - 11 \quad .12 \quad 10x^4 + 40x^3 + 36x^2 - 20x - 14$$

הקשר בין גרף הפונקציה לבין גרף הנגזרת שלה

- אם בתחום מסוים הפונקציה $f(x)$ עולה (והנגזרת של $f(x)$ אינה אפס), אז הנגזרת $f'(x)$ היא חיובית. מכיוון שפונקציית הנגזרת היא חיובית, אז הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ נמצא מעל ציר ה- x .
- אם בתחום מסוים הפונקציה $f(x)$ יורדת (והנגזרת של $f(x)$ אינה אפס), אז הנגזרת $f'(x)$ היא שלילית. מכיוון שפונקציית הנגזרת היא שלילית, אז הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ נמצא מתחת לציר ה- x .
- כאשר הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ שווה לאפס, כלומר $f'(x) = 0$, אז הגרף של הפונקציה $f'(x)$ נפגש עם ציר ה- x (זו נקודת אפס של $f'(x)$).

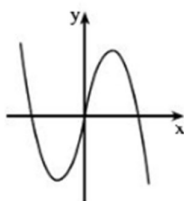
1.

- לפונקציה $f(x)$ שלפניכם, יש שתי נקודות קיצון בלבד – נקודת מקסימום ב- $x=2$, ונקודת מינימום ב- $x=6$. נתון: הנגזרת $f'(x)$ שונה מאפס בכל הנקודות שאינן נקודות קיצון.
- רשמו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.
 - רשמו באילו נקודות חותך הגרף של הנגזרת $f'(x)$ את ציר ה- x .
 - רשמו את התחומים בהם הנגזרת $f'(x)$ חיובית, ואת התחומים בהם הנגזרת $f'(x)$ שלילית.
 - שרטטו גרף אפשרי של הפונקציה הנגזרת $f'(x)$.



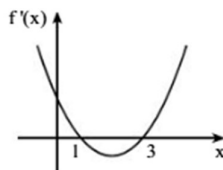
2.

- לפונקציה $f(x)$ יש שתי נקודות קיצון בלבד – מינימום ב- $x=-2$ ומקסימום ב- $x=2$.
- באילו תחומים גרף הנגזרת $f'(x)$ נמצא מעל ציר ה- x , ובאילו תחומים הוא נמצא מתחתיו?
 - בהנחה שלגרף הנגזרת $f'(x)$ יש נקודת קיצון אחת: (1) שרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$. (2) מהו התחום שבו נמצא ערך ה- x של נקודת הקיצון של $f'(x)$?

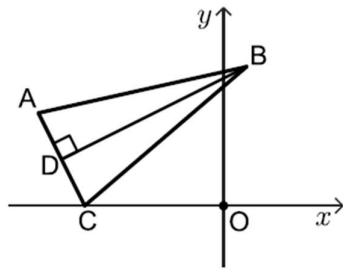


3.

- בציור שלפניכם מתואר גרף הפונקציה $f'(x)$, שהיא הנגזרת של הפונקציה $f(x)$. הגרף המתואר חותך את ציר ה- x בנקודות $x=1$ ו- $x=3$.
- כתבו את התחומים בהם $f'(x)$ חיובית ואת התחום בו $f'(x)$ שלילית.
 - מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.
 - מצאו את שיעור ה- x של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוג הקיצון.



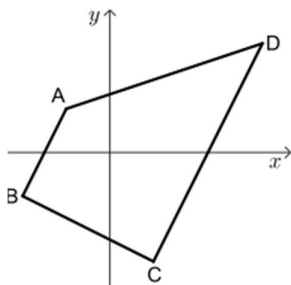
גאומטריה משולבת:



- (1)** במשולש שווה שוקיים ABC ($AB = BC$).
- נתון $A(-8, 4)$, $B(1, 6)$ הקודקוד C נמצא על ציר ה- x .
- מצאו את אורך שוק המשולש.
 - מצאו את שיעורי הנקודה C אם ידוע ש- $x_C < x_B$.
 - BD הוא גובה לצלע AC .
 - הסבירו ללא חישוב מדוע $AD = CD$.
 - חשבו את אורך BD .
 - חשבו את גודל הזווית $\angle ACB$.
 - חשבו את גודל הזווית $\angle BCO$, (O ראשית הצירים).

- (2)** נתונה מקבילית $ABCD$ ששיעורי שלושה מקודקדיה הם: $A(6, 4)$, $B(-5, -2)$, $C(-11, 9)$.

- חשבו את שיעורי הקודקוד הרביעי (קודקוד D).
 - האם המקבילית היא מעוין?
 - האם המקבילית היא מלבן?
 - האם המקבילית היא ריבוע?
- (1) חשבו את אורכי צלעות המקבילית ואת אורכי אלכסוניה.
- (2) חשבו את היקף המקבילית.
- (3) חשבו את שטח המקבילית בשתי דרכים:
- בעזרת שימוש באורכי הצלעות בלבד.
 - בעזרת שימוש באלכסונים בלבד.

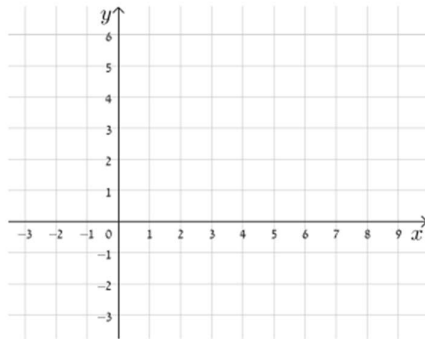


- (3)** במערכת הצירים שלפניכם נתון מרובע $ABCD$ ששיעורי קודקדיו הם: $A(-2, 2)$, $B(-4, -2)$, $C(2, -5)$, $D(7, 5)$.
- מה הוא סוג המרובע?
 - במרובע זה מעבירים קטע אמצעים EF (E היא אמצע הצלע AD ו- F היא אמצע הצלע BC).
 - מצאו את שיעורי הנקודה F .
 - מצאו את משוואת הישר EF .
 - האלכסון AC חותך את EF בנקודה K .
- מצאו את שיעורי הנקודה K .
 - קבעו האם: $AK = CK$. נמקו.

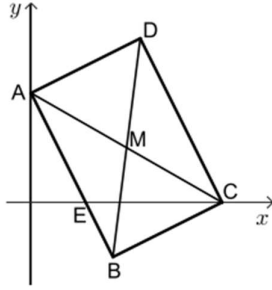
- ה. הנקודה R היא נקודת החיתוך של CD עם ציר ה- x .
- (1) מצאו את שיעורי הנקודה R.
- (2) הישר AR חותך את EF בנקודה M. מצאו את שיעורי הנקודה M.
- (3) קבעו האם: $AM=RM$. נמקו.
- ו. הנקודה P היא נקודה כלשהי הנמצאת על הצלע CD.
- הישר AP חותך את EF בנקודה N.
- הוכיחו כי: $AN=PN$ (ללא שימוש בשיעורי הנקודות במערכת הצירים).

4 קודקודי המרובע ABCD הם: $A(8,2)$, $B(2,6)$, $C(0,1)$, $D(6,-3)$

א. סרטטו את המרובע ABCD במערכת הצירים שלפניכם:



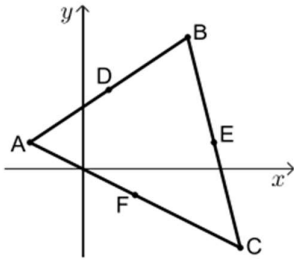
- ב. מה הוא סוג המרובע ABCD? הסבירו.
- ג. מעבירים את האלכסון AC. מה הוא אורכו?
- ד. מסמנים בנקודה E את אמצע הצלע CD ובנקודה H את אמצע האלכסון AC.
- הוכיחו כי $\triangle CEH \sim \triangle ABC$.
- ה. (1) חשבו את זווית $\angle ACD$.
- (2) חשבו את אורכי צלעות המרובע ABCD.
- (3) חשבו את שטח המשולש ACD.
- (4) חשבו את שטח המרובע ABCD.
- ו. חשבו את היחס שבין שטח המשולש CEH לשטח המרובע ABCD.



6) המרובע ABCD הוא מקבילית. אורך הצלע $BC = AD = \sqrt{20}$. נתון: $B(3, -2)$, $D(4, 6)$, O ראשית הצירים.

- מצאו שיעורי הנקודה A, אם נתון: $y_A < 6$.
- הוכיחו כי המרובע ABCD הוא מלבן.
- אלכסוני המלבן נפגשים בנקודה M. מצאו את שיעורי הקודקוד C.
- הצלע AB חותכת את ציר ה-x בנקודה E. מצאו את שיעורי הקודקוד E.

- הוכיחו כי המשולשים CBE ו-AOE דומים, ומצאו את יחס הדימיון.
- מצאו פי כמה גדול שטח המשולש CBE משטח המשולש AOE.
- חשבו את שטח המרובע ACBO.
- חשבו את גודל הזווית $\angle ACB$.



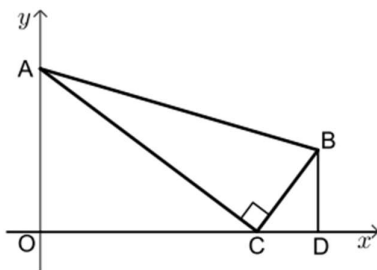
7) במשולש ABC הנקודות D, E, F הן אמצעי הצלעות AB, BC, AB בהתאמה.

א. הוכיחו כי המרובע ADEF הוא מקבילית. נתון: $A(-2, 1)$, $F(2, -1)$, $E(5, 1)$, $D(1, 3)$.

- מצאו את שיעורי הנקודה B.
- חשבו את שיעורי הנקודה C.
- הסבירו מדוע $\triangle DEF \sim \triangle CAB$.
- מהו היחס בין היקף המשולש DEF לבין היקף המשולש CAB?
- מהו היחס בין שטח המשולש DEF לבין שטח המשולש CAB?
- הוכיחו: $S_{\triangle ABF} = 2 \cdot S_{\triangle DEF}$.

8) במשולש ישר זווית ABC ($\angle ACB = 90^\circ$) הקודקוד C מונח על ציר ה-x.

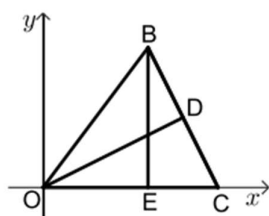
מהקודקוד B הורידו אנך לציר ה-x החותך אותו בנקודה D. הנקודה O היא ראשית הצירים.



- הוכיחו: $\triangle AOC \sim \triangle CDB$.
- משוואת הצלע AC היא: $4y + 3x = 48$, מצאו את אורך הצלע AO.

ג. נתון כי יחסי השטחים $\frac{S_{\triangle AOC}}{S_{\triangle CDB}} = \frac{64}{9}$.

- מצאו את אורך הצלע CD.
- מצאו את אורכי הצלעות CO ו-BD.
- חשבו את גודל הזווית $\angle CBA$.
- האם המשולשים AOC ו-ACB דומים זה לזה? נמקו.



9 במשולש OBC העבירו גבהים OD ו-BE לצלעות BC ו-OC בהתאמה.

הנקודה O היא ראשית הצירים. הנקודה C נמצאת על ציר ה- x .

משוואת הישר BC היא: $y = -2x + 20$.

א. מצאו את אורך הצלע OC.

ב. (1) מצאו את משוואת הישר OD.

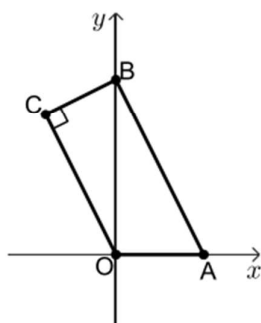
(2) חשבו את גודל הזווית החדות של המשולש ODC.

ג. הוכיחו כי המשולשים BEC ו-ODC דומים.

ד. נתון: $\frac{S_{BEC}}{S_{ODC}} = 0.8$.

(1) חשבו את אורך הצלע BC.

(2) חשבו את שטח המשולש OBC.



10 המרובע ABCO הוא טרפז ישר זווית ($\angle C = 90^\circ$, $AB \parallel OC$).

משוואת הצלע AB היא: $y = -2x + 5$.

הנקודות A ו-B נמצאות על ציר ה- x ועל ציר ה- y בהתאמה.

O ראשית הצירים (כמתואר באיור).

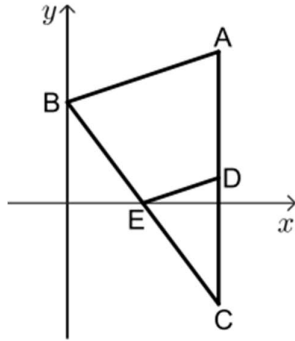
א. (1) מצאו את משוואת הצלע BC.

(2) חשבו את שיעורי הקודקוד C.

ב. חשבו את גודל הזווית BOC.

ג. (1) הוכיחו כי המשולשים ABO ו-BOC דומים.

(2) חשבו את יחס השטחים של המשולשים ABO ו-BOC.



- 11** בסרטוט שלפניכם מתואר משולש ABC. הקודקוד B נמצא על ציר ה- y , והצלע AC מקבילה לציר ה- y . נתון: $AB = \sqrt{40}$, $A(6, 6)$. שיעור ה- y של הקודקוד B קטן מ-6. א. מצאו את שיעורי הקודקוד B. הנקודה E היא אמצע הצלע BC. נתון: הנקודה E נמצאת על ציר ה- x . ב. מצאו את שיעורי הנקודות C ו-E. הנקודה D היא אמצע הצלע AC. מן הנקודה E העבירו ישר המקביל לציר ה- y וחותר את הצלע AB בנקודה F. ג. (1) הוכיחו כי המרובע FADE הוא מקבילית. (2) חשבו את שטח המרובע FADE. ד. מצאו את גודל הזווית $\angle DEF$.

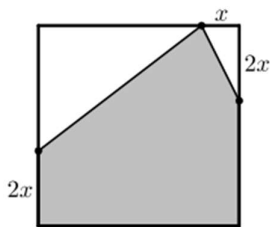
תשובות סופיות:

- (1) א. $\sqrt{85}$ ב. $C(-6, 0)$ ג. במשולש שווה שוקיים הגובה לבסיס הוא גם תיכון. ד. $BD = 4\sqrt{5}$ ה. $\angle ACB = 75.963^\circ$ ו. $\angle BCO = 40.6^\circ$.
- (2) א. $D(0, 15)$ ב. כן, הוכחה. ג. כן, הוכחה. ד. כן, הוכחה.
- (3) א. המרובע ABCD הוא טרפז, מכיוון שיש לו זוג צלעות נגדיות מקבילות ולא שוות: $(AB \parallel CD, AB \neq CD)$. ב. (1) $F(-1, -3.5)$ ב. (2) $y = 2x - 1.5$ ג. $K(0, -1.5)$, הוכחה. ד. (1) $R(4.5, 0)$ ד. (2) $M(1.25, 1)$ ד. (3) $AM = RM$, הוכחה. ה. הוכחה.
- (4) א. ראו סרטוט בסרטון וידאו. ב. היות ו- $AB \parallel CD$ וכן $AC \parallel DB$ המרובע הוא מקבילית. ג. $AC = d_{AC} = \sqrt{(8-0)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{8^2 + 1^2} = \sqrt{65} \sim 8.06$ ד. הוכחה. ה. (1) 40.83° ה. (2) $AD = BC = \sqrt{29}$, $AB = CD = \sqrt{52}$. ה. (3) $S_{\triangle ACD} =$ שטח 19 יחידות שטח ה. (4) $S_{ABCD} =$ שטח 38 יחידות שטח ו. $\frac{S_{\triangle CEH}}{S_{ABCD}} = \frac{4.75}{38} = \frac{1}{8}$.

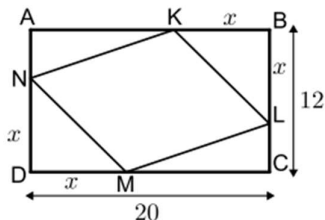
- (6) א. $A(0,4)$ ב. הוכחה. ג. $C(7,0)$ ד. $E(2,0)$
ה. (1) הוכחה, יחס הדימיון $\frac{2}{\sqrt{5}}$. (2) פי 1.25. ו. 21 יח"ר. ז. 56.31° .
- (7) א. הוכחה. ב. $B(4,5)$ ג. $C(6,-3)$ ד. הוכחה.
ה. 1:2. ו. 1:4. ז. הוכחה.
- (8) א. הוכחה. ב. 12 יח"ר $AO =$ ג. (1) 4.5 יח"ר $CD =$ ג. (2) $BD = 6, CO = 16$.
ד. (1) 69.44° ד. (2) ל"א.
- (9) א. $OC = 10$ ב. (1) $y = \frac{1}{2}x$ ב. (2) $\angle C = 63.43^\circ, \angle COD = 26.565^\circ$.
ד. (1) $BC = 4\sqrt{5}$ ד. (2) 40 יח"ר $S_{\triangle ABOC} =$
- (10) א. (1) $y = \frac{1}{2}x + 5$ א. (2) $C(-2,4)$ ב. $\angle BOC = 26.56^\circ$
ג. (1) הוכחה. ג. (2) $\frac{S_{\triangle ABO}}{S_{\triangle BOC}} = \frac{5}{4}$
- (11) א. $B(0,4)$ ב. $E(3,0), C(6,-4)$ ג. (1) הוכחה.
ג. (2) 15 יח"ר. ד. $\angle DEF = 71.56^\circ$.

בעיות קיצון:

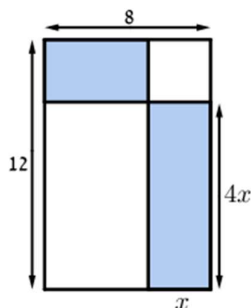
בעיות קיצון בהנדסת המישור:



- (13) נתון ריבוע בעל אורך צלע של 16 ס"מ.
מקצים קטע שאורכו x על הצלע העליונה ושני קטעים שאורכם $2x$ על הצלעות הצדדיות כמתואר באיור כך שנוצר המחומש המסומן.
מצאו מה צריך להיות ערכו של x עבורו שטח המחומש יהיה מקסימלי.

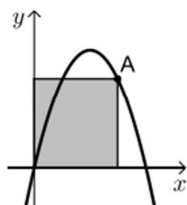


- (14) הנקודות N, M, L, K מקצות קטעים שווים במלבן $ABCD$ כך ש: $BK = BL = DM = DN = x$.
צלעותיו של המלבן הן 20 ס"מ ו-12 ס"מ.
א. הבע באמצעות x את סכום שטחי המשולשים: $\triangle AKN + \triangle KBL + \triangle CLM + \triangle DNM$.
ב. מצא מה צריך להיות x כדי ששטח המרובע $LKNM$ יהיה מקסימלי.
ג. מה הוא השטח של המרובע $LKNM$ במקרה זה?



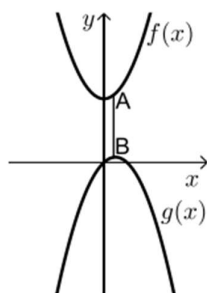
- 16** נתון מלבן שאורכי צלעותיו הם 8 ס"מ ו-12 ס"מ כמתואר באיור. מקצים קטעים באורכים של x ושל $4x$ על צלעות המלבן כך שנוצרים המלבנים הצבועים. מצאו את x עבורו סכום שטחי המלבנים הצבועים הוא מינימלי.

בעיות קיצון בפונקציות וגרפים:



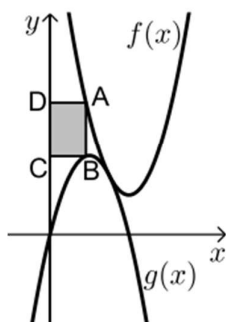
17 נתונה הפונקציה: $f(x) = 6x - x^2$.

- מנקודה A שעל הפונקציה ברביע הראשון הורידו אנכים לצירי השיעורים כך שנוצר מלבן כמתואר בסרטוט. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח המלבן יהיה מקסימלי?



18 נתונות הפונקציות: $f(x) = x^2 + 12$ ו- $g(x) = 2x - x^2$

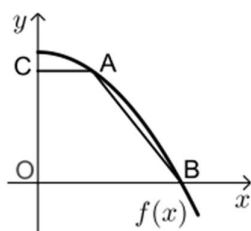
- כמתואר: הנקודות A ו-B נמצאות בהתאמה על הגרפים של הפונקציות: $f(x)$ ו- $g(x)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y . מצאו מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שאורך הקטע AB יהיה מינימלי.



- 19** באיור שלפניכם מתוארים הגרפים של

הפונקציות: $f(x) = x^2 - 8x + 18$ ו- $g(x) = -x^2 + 4x$.

- הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y . מעבירים אנכים מהנקודות A ו-B לציר ה- y כך שנוצר מלבן (המסומן). נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t .
 א. הביעו באמצעות t את שטח המלבן המסומן.
 ב. מצאו את ערכו של t עבורו שטח המלבן הוא מקסימלי.
 ג. מה יהיה שטח המלבן במקרה זה?



(20) נתונה הפונקציה: $f(x) = 36 - x^2$.

על גרף הפונקציה ברביע הראשון מסמנים נקודה A.

מהנקודה A מעבירים ישר המקביל לציר ה- x

שחותך את ציר ה- y בנקודה C.

הנקודה B היא נקודת החיתוך של הפונקציה

עם ציר ה- x ו- O ראשית הצירים.

א. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי

ששטח הטרפז ABOC יהיה מקסימלי?

ב. מה יהיה שטח הטרפז במקרה זה?

תשובות:

(13) $x = 6$.

(14) א. $2x^2 - 32x + 240$

ב. $x = 8$

ג. $S = 128$ סמ"ר

(15) א. 6 ס"מ ו- 6 ס"מ.

(16) $x = 2.75$.

(17) $A(4, 8)$.

(18) $A(0.5, 12.25)$.

(19) א. $S = 2t^3 - 12t^2 + 18t$

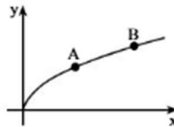
ב. $t = 1$

ג. $S = 8$.

(20) א. $A(2, 32)$

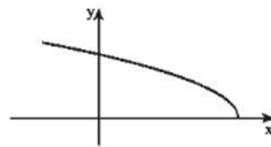
ב. $S = 128$.

פונקציות עם שורשים ריבועיים



1. בציור מתואר גרף הפונקציה $y = \sqrt{x}$, ועליו מסומנות הנקודות A ו-B. בנקודה A שיעור ה-x הוא 4 ובנקודה B שיעור ה-x הוא 9.
א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
ב. מצאו את שיעורי הנקודות A ו-B.

2. נתונה הפונקציה $y = \sqrt{x+4}$.
א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. תנו דוגמה לערך אחד של x שאינו בתחום ההגדרה של הפונקציה.



3. לנניכם גרף הפונקציה $y = \sqrt{5-x}$.
א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מצאו את ערך ה-y עבור $x=1$.
ג. האם הפונקציה מוגדרת בנקודה שבה $x=-11$?
אם כן, מצאו את ערך הפונקציה בנקודה זו.
ד. האם הנקודה $(-20; -5)$ נמצאת על גרף הפונקציה?

מצאו את תחום ההגדרה של כל אחת מהפונקציות הבאות:

- | | | |
|-------------------------|---------------------------------|---------------------------------------|
| 4. $y = \sqrt{x-7}$ | 5. $y = \sqrt{2x+8}$ | 6. $y = \sqrt{18-3x}$ |
| 7. $y = \sqrt{-4x}$ | 8. $y = x-3\sqrt{x}$ | 9. $y = 1+5x\sqrt{-x}$ |
| 10. $y = x^2\sqrt{x+6}$ | 11. $y = \sqrt{x} + \sqrt{2-x}$ | 12. $y = \sqrt{x-6} - \sqrt{x+1} + 8$ |

פתרו את המשוואות הבאות (בדקו את הפתרונות המתקבלים):

- | | |
|-------------------------|-------------------------|
| 1. $\sqrt{x} = 6$ | 2. $8 - \sqrt{x} = 0$ |
| 3. $\sqrt{x+1} = 2$ | 4. $\sqrt{3x-2} = 6$ |
| 5. $3\sqrt{x} - 15 = 0$ | 6. $4\sqrt{2x+3} = 16$ |
| 7. $\sqrt{x} = -1$ | 8. $\sqrt{x-2} = -3$ |
| 9. $x = \sqrt{x}$ | 10. $x - 2\sqrt{x} = 0$ |
| 11. $\sqrt{x^2+5} = 3$ | 12. $x = \sqrt{18-x^2}$ |

תשובות:

1. 36, 2. 64, 3. 3, 4. $\frac{2}{3}$, 5. 25, 6. 6.5, 7. אין פתרון, 8. אין פתרון, 9. 0, 1.

10. 0, 4, 11. -2, 12. 3